Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 24, núm. 1, 2009. Pàg. 63–77. DOI: 10.2436/20.2002.01.21

Shiing-shen Chern: 1911-2004*

Hung-hsi Wu

Resum Aquest article és un recull biogràfic de la vida i obra d'un dels més grans geòmetres del segle xx.

Paraules clau: Chern.

Classificació MSC2010: 01A70, 53-02.

Shiing-shen Chern, un dels gegants en la història de la geometria, va morir a Tianjin, la Xina, el 3 de desembre de 2004, a l'edat de 93 anys. Va passar els cinc darrers anys de la seva vida a Tianjin, però la seva carrera es va desenvolupar principalment als Estats Units del 1949 al 1999.

La feina de Chern va revitalitzar i redefinir la geometria diferencial i la geometria algebraica transcendental. En les dècades prèvies a 1944, quan es va embarcar en l'escriptura dels seus famosos articles sobre les classes de Chern i la geometria dels fibrats, la geometria diferencial havia passat per un període d'estancament. Els seus articles van marcar la reentrada de la geometria diferencial en les línies principals de la matemàtica, i la seva estada a Berkeley (1960–1979) va contribuir a fer-ne un dels primers centres de geometria de tot el món. Durant la seva vida, va tenir el plaer de veure com les classes de Chern es convertien en part del vocabulari bàsic de les matemàtiques i la física teòrica contemporànies. Hi ha també l'homomorfisme de Chern–Weil, un refinament de les classes de Chern per a fibrats hermítics, els invariants de Chern–Moser i els de Chern–Simons. Chern va ser també una autoritat matemàtica. Normalment, el gran matemàtic i el gran líder polític no coincideixen en la mateixa persona, però Chern va ser una rara excepció. Va ser el lligam principal entre les comunitats matemàtiques americana i xinesa en els anys immediatament posteriors a la reobertura de la Xina el 1978. A més, en les quatre dècades que van del 1946 al 1984, va fundar o cofundar tres

* Traducció de Cristina Dalfó i Agustí Reventós de l'article publicat al *Bull. Amer. Math. Soc.*, 46 (2009), 327–338. Agraïm a la revista la seva autorització per a publicar aquesta traducció al català.

instituts matemàtics, i el que està als Estats Units, el Mathematical Sciences Research Institute, a Berkeley, té encara un paper destacat.

Chern va néixer el 26 d'octubre de 1911 a Jiaxing, a la província de Zhejiang, la Xina, setze dies després de la revolució que va enderrocar la dinastia manxúria i que va ser el començament de la Xina moderna. Com era habitual en aquella època a la Xina, l'escolarització de Chern va estar sotmesa a l'atzar. Va estar *un dia* a l'educació primària, quatre anys a l'educació secundària i, als quinze anys, va saltar dos cursos per entrar a la Universitat de Nankai. Sota la tutela d'un gran professor a Nankai, Chern va començar a aprendre les matemàtiques essencials. Al final de la seva vida, conservava un gran record dels seus anys a Nankai, i aquest fet va tenir un paper important en la seva eventual decisió de tornar a la Xina el 1999. Els quatre anys posteriors (1930–1934), els va passar com a estudiant llicenciat a la Universitat de Qing Hua, a Beijing (aleshores Peiping), i va publicar tres articles sobre geometria diferencial projectiva. Encara que sentia que el seu futur estava en l'àrea de la geometria, els seus darrers anys recordava que aleshores no sabia «com pujar aquesta muntanya preciosa».

El 1932, Wilhelm Blaschke d'Hamburg, Alemanya, va anar a visitar Beijing i va donar algunes classes en geometria de teixits. Malgrat que aquestes lliçons eren bastant elementals, van obrir els ulls de Chern al fet que l'època de la geometria diferencial projectiva havia anat i vingut, i que una cosa anomenada *geometria diferencial global* estava a l'horitzó. Quan Chern va guanyar una beca el 1934 per estudiar a l'estranger, va desafiar la idea convencional d'anar als Estats Units i va triar anar a la Universitat d'Hamburg. Aquesta va ser la primera de les tres grans decisions que Chern va fer en el període 1934–1943, que van condicionar la resta de la seva vida. Com veurem, cadascuna d'aquestes decisions no va ser en absolut fàcil ni òbvia, tot i que *a posteriori* ho puguin semblar. Al llarg de la seva vida, Chern va semblar no perdre aquesta extraordinària habilitat de prendre la decisió correcta en el moment apropiat.

Poc després de la seva arribada a Hamburg, va resoldre un dels problemes de Blaschke en geometria de teixits i va rebre el doctorat el 1936. Tanmateix, la descoberta més important que va fer durant els dos anys que va estar a Hamburg va ser la feina d'Elie Cartan. El descobriment va ser a causa no només del fet que Blaschke era un dels pocs en aquell temps que va comprendre i reconèixer la importància dels treballs geomètrics de Cartan, sinó també a la feliç coincidència que E. Kähler havia, tot just, publicat el que ara coneixem com la teoria de Cartan–Kähler sobre sistemes diferencials exteriors i va donar un seminari sobre aquesta teoria a Hamburg. Quan Chern va rebre una beca postdoctoral el 1936 per a seguir els seus estudis a Europa, va buscar el consell de Blaschke, el qual li va donar dues opcions: romandre a Hamburg per aprendre teoria algebraica de nombres amb Emil Artin o anar a París a aprendre geometria amb Elie Cartan. En aquell temps, Artin era una estrella major i també un professor fenomenal, com Chern sabia molt bé de primera mà. Però Chern va fer la seva segona gran decisió i va escollir Elie Cartan i París. La seva estada d'un any a París (1936–1937) va ser, en les seves paraules, «inoblidable». Chern va conèixer la feina del mestre directament del mestre mateix i la influència de Cartan en el seu desenvolupament científic es pot veure en gairebé cada pàgina dels quatre volums dels seus *Selected papers* (1978–1989).

Ja abans de tornar a la Xina el 1937, Chern va ser nomenat professor de matemàtiques a la Universitat de Qing Hua, la universitat on es va llicenciar. Malauradament, la guerra entre la Xina i el Japó va esclatar al nord-est de la Xina quan ell encara era a París, i la Universitat de Qing Hua es va traslladar a Kunming al sud-oest de la Xina, com a part de la Southwest Associated University. Van passar més de deu anys abans que Chern pogués veure de nou el campus de Qing Hua a Beijing. Durant el període 1937–1943, va ensenyar i estudiar sol a Kunming sota les dures condicions de la guerra. De vegades s'ha dit que un cert aïllament no és negatiu per a la gent que fa treball creatiu.

En aquells anys, Chern va eixamplar i aprofundir la seva comprensió de l'obra de Cartan. Quasi al final de la seva vida, Chern va escriure que un resultat del seu aïllament va ser que va llegir el 70 % dels articles de Cartan, els quals ocupen un total de 4.750 pàgines. Un altre fet positiu d'aquells anys va ser el seu casament amb Shih-ning Cheng, el 1939, malgrat que uns mesos més tard, la seva dona, que estava embarassada, va haver de deixar-lo i tornar a Shangai per raons de seguretat personal. El seu fill Paul va néixer l'any següent, però no va conèixer el seu pare fins que va tenir sis anys.

En aquells anys, Chern va continuar la seva recerca i els seus articles van aparèixer en revistes internacionals, incloent-ne dos en els *Annals of Mathematics*, el 1942. D'aquests dos, el de geometria integral [3] va ser comentat en el *Mathematical Reviews* per André Weil, qui va fer-ne grans elogis, i l'altre, sobre superfícies isotròpiques [4], va tenir com a *referee* ni més ni menys que a Hermann Weyl, qui va fer conèixer aquest fet al mateix Chern quan finalment es van trobar el 1943. Weyl va llegir cada línia del manuscrit [4], va fer suggeriments per a millorar-lo i va recomanar la seva publicació amb entusiasme. Però Chern no estava satisfet només per ser algú conegut per l'elit matemàtica, perquè volia trobar la seva pròpia veu en les matemàtiques. Quan va rebre una invitació per visitar l'Institute for Advanced Study (IAS) a Princeton per part d'O. Veblen i Weyl el 1943, va aprofitar l'oportunitat i va acceptar malgrat la duresa del viatge en temps de guerra. Amb un considerable risc personal, va passar set dies volant en un avió militar des de Kunming a Miami passant per l'Índia, l'Àfrica i l'Amèrica del Sud. Va arribar a Princeton a l'agost amb tren. La visita a l'IAS va ser la seva tercera gran decisió de la dècada i, potser, la més important de totes.

La seva estada a l'IAS des de l'agost de 1943 al desembre de 1945 va canviar el curs de la geometria diferencial i la geometria algebraica transcendental; va canviar també la seva vida. Poc després de la seva arribada a Princeton, va fer una descoberta que no només va resoldre un dels majors problemes d'aquells temps —trobar una demostració *intrínseca* del teorema n-dimensional de Gauss-Bonnet—, sinó que també li va permetre definir les classes de Chern sobre fibrats principals amb grup d'estructura $U(n)$, el grup unitari. Parlant sense rigorositat, podem dir que la descoberta en qüestió és que, en una varietat riemanniana o hermítica, la curvatura de la mètrica es pot utilitzar per generar invariants topològics de forma canònica: uns certs polinomis en la curvatura són formes diferencials tancades i, aleshores, són classes cohomològiques de la varietat degudes al teorema de De Rham. La millor introducció a aquesta temàtica continua sent encara el primer article de Chern sobre el tema, el remarcable article de sis pàgines dels *Annals of Mathematics* sobre la demostració intrínseca del teorema de Gauss-Bonnet [5]. Passem ara a una breu descripció d'aquest article (vegeu [19]).

Sigui M una varietat riemanniana compacta i orientada de dimensió $2n$. Escollim una referència local $e_1, \dots, e_{2n}$ (i. e., els e_i són camps vectorials i són ortonormals respecte de la mètrica). Sigui ω^i la forma dual de $\{e_i\}$ (i. e., els ω^i són 1-formes definides en el mateix entorn que els e_i i $\omega^i(e_j) = \delta^i_j$ per a $i, j = 1, \dots, 2n$). A més, sigui Ω^i_j la curvatura respecte de $\{e_i\}$. Noteu que si $\widetilde{e}_1, \dots, \widetilde{e}_{2n}$ és una altra base ortonormal de camps i h és la matriu ortogonal del canvi de base, $\widetilde{e}_i = \sum_k e_k h^k_i$, aleshores la curvatura $\widetilde{\Omega}^i_j$ respecte de $\{\widetilde{e}_i\}$ satisfà $\widetilde{\Omega}^i_j = \sum_{l,k} (h^{-1})^i_l \Omega^l_k h^k_j$. Però $(h^{-1})^i_l = h^l_i$; per tant, tenim que

$$\widetilde{\Omega}^i_j = \sum_{l,k} h^l_i \Omega^l_k h^k_j. \tag{1}$$

Definim la següent $2n$-forma Ω per

$$\Omega = \frac{1}{2^{2n}\pi^n n!} \sum \epsilon_{i_1 \dots i_{2n}} \Omega^{i_1}_{i_2} \cdots \Omega^{i_{2n-1}}_{i_{2n}}, \tag{2}$$

on $\epsilon_{i_1 \dots i_{2n}}$ és $+1$ o -1, depenent de si $i_1 \dots i_{2n}$ és una permutació parell o senar de $1, \dots, 2n$ i, altrament, és igual a 0. *A priori*, Ω depèn de l'elecció de e_i i aleshores només està definit en l'entorn on està definit e_i. Tanmateix, l'equació (1) implica que si e_i es reemplaça per $\widetilde{e}_i$, de manera que Ω^i_j es reemplaci per la curvatura $\widetilde{\Omega}^i_j$ corresponent a $\widetilde{e}_i$, aleshores

$$\sum \epsilon_{i_1 \dots i_{2n}} \Omega^{i_1}_{i_2} \cdots \Omega^{i_{2n-1}}_{i_{2n}} = \sum \epsilon_{i_1 \dots i_{2n}} \widetilde{\Omega}^{i_1}_{i_2} \cdots \widetilde{\Omega}^{i_{2n-1}}_{i_{2n}}.$$

Per tant, Ω és independent de l'elecció de la referència ortonormal $\{e_i\}$ i és una $2n$-forma globalment definida en M. El teorema de Gauss-Bonnet, el qual va ser demostrat en tota generalitat primer per Allendoerfer i Weil el 1943 [1], afirma que

$$\int_M \Omega = \chi(M), \tag{3}$$

on $\chi(M)$ denota la característica d'Euler de M. Ens referirem a Ω com l'*integrand de Gauss-Bonnet*.

El problema de la demostració d'Allendoerfer–Weil és que és conceptualment complexa: com suggereix el terme «poliedre de Riemann» en el títol de [1], es comença triangulant M en un complex simplicial format per petits símplexs, els quals (essencialment) es poden encaixar isomètricament dins l'espai euclidià. Aleshores l'integrand de Gauss–Bonnet s'integra sobre cada símplex (aquí s'utilitzen resultats previs del teorema de Gauss–Bonnet obtinguts per Fenchel i Allendoerfer per a subvarietats en espais euclidians), i aleshores sumem els resultats dels símplexs individuals per assegurar-nos que es cancel-len els termes de la frontera i apareix la característica d'Euler. Al final de la demostració no se sap *per què* el teorema és cert. Weil va expressar els seus recels sobre la demostració a Chern quan aquest va arribar a Princeton i va suggerir-li que hi hauria d'haver una demostració que fos *intrínseca* en el sentit de no haver de recórrer a immersions dins l'espai euclidià. La demostració de Chern en [5] aconsegueix exactament aquest objectiu i nosaltres en donem ara les idees principals.

Considerem el fibrat de les referències $F(M)$ de M, el qual és el fibrat de referències ortonormals, $F(M) = \{(x, f_1, \ldots, f_{2n}) : x \in M; f_1, \ldots, f_{2n}$ és una base ortonormal en l'espai tangent de M a $x\}$.[1] Tenim l'aplicació $\pi : F(M) \to M$. Com que Ω és una forma en M, aleshores $\pi^*\Omega$ és una forma en $F(M)$. El pas més important de la demostració de Chern del teorema de Gauss-Bonnet és que existeix una $(2n-1)$-forma Π en $F(M)$ de manera que

$$\pi^*\Omega = d\Pi. \tag{4}$$

Aleshores, l'integrand de Gauss-Bonnet en $F(M)$ esdevé *exacte*! Aquest resultat era totalment inesperat i va subratllar per primera vegada la importància intrínseca dels fibrats *en geometria diferencial*. De vegades, un fet sorprenent pot arribar a ser quasi trivial perquè pot dependre només d'un simple truc, però (4) és el cas contrari. Sigui θ^i_j la forma de connexió de la connexió de Levi-Civita en $F(M)$; θ^i_j $(i, j = 1, \ldots, 2n)$ és una 1-forma amb valors en les matrius antisimètriques $\mathfrak{so}(2n)$, l'àlgebra de Lie del grup ortogonal especial $SO(2n)$. La curvatura Θ^i_j en $F(M)$, una 2-forma també amb valors en $so(2n)$, ve donada per $\Theta^i_j = d\theta^i_j + \sum_k \theta^i_k \wedge \theta^k_j$. Aquesta Θ^i_j està relacionada amb la precedent Ω^i_j com segueix: si $\{e_i\}$ és la referència ortonormal local com abans i Ω^i_j és la curvatura respecte de $\{e_i\}$, sigui e la secció local de $\pi : F(M) \to M$ definida per $e(x) = (x, e_1(x), \ldots, e_{2n}(x))$. Aleshores $e^*(\Theta^i_j) = \Omega^i_j$ per a tot i, j.

Aquest darrer fet sobre Θ^i_j i Ω^i_j té la conseqüència següent. Considerem la $2n$-forma Θ definida en $F(M)$ per

$$\Theta = \frac{1}{2^{2n}\pi^n n!} \sum \epsilon_{i_1 \cdots i_{2n}} \Theta^{i_1}_{i_2} \cdots \Theta^{i_{2n-1}}_{i_{2n}}, \tag{5}$$

on $\epsilon_{i_1 \cdots i_{2n}}$ té el mateix significat que abans. Se segueix de (5) que $e^*\Theta = \Omega$, de manera que $(e \circ \pi)^*\Theta = \pi^*\Omega$. Un raonament simple[2] mostra que $(e \circ \pi)^*\Theta = \Theta$.

1 L'ús d'aquest fibrat en la demostració original de Chern és implícita com si ell hagués treballat principalment amb el fibrat esfèric unitari $S(M)$ de M, però la idea de la demostració és la mateixa tant si s'utilitza $F(M)$ com $S(M)$.

2 Utilitzant el fet que Θ és una forma horitzontal en $F(M)$.

Combinant aquestes dues expressions, tenim

$$\pi^*\Omega = \Theta. \tag{6}$$

Per tant, per demostrar (4), només cal demostrar

$$\Theta = d\Pi \tag{7}$$

per a alguna $(2n-1)$-forma Π en $F(M)$.

La demostració de Chern de (7) requereix la introducció, en $F(M)$, de les $(2n-1)$-formes $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_{n-1}$ i de les $2n$-formes $\Psi_0, \Psi_1, \ldots, \Psi_{n-1}$; per a cada $k = 0, \ldots, n-1$, tenim que

$$\Phi_k = \sum \epsilon_{i_1 \cdots i_{2n-1}} \Theta^{i_1}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \Theta^{i_{2k-1}}_{i_{2k}} \wedge \theta^{i_{2k+1}}_{i_{2n}} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_{2n-1}}_{i_{2n}}$$

i

$$\Psi_k = (2k+1) \sum \epsilon_{i_1 \ldots i_{2n-1}} \Theta^{i_1}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \Theta^{i_{2k-1}}_{i_{2k}} \wedge \Theta^{i_{2k+1}}_{i_{2n}} \wedge \theta^{i_{2k+2}}_{i_{2n}} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_{2n-1}}_{i_{2n}},$$

on cada sumatori es fa sobre totes les permutacions $i_1, \ldots, i_{2n-1}$ de $1, \ldots, 2n-1$, i $\epsilon_{i_1 \ldots i_{2n-1}}$ és igual a $+1$ o -1, depenent de si la permutació és parell o senar. Noteu que de (5), tenim

$$\Psi_{n-1} = (2^{2n}\pi^n n!)\Theta. \tag{8}$$

Utilitzant la identitat de Bianchi i la definició de Θ^i_j en termes de la forma de connexió θ^i_j, s'obté la relació de recurrència següent:

$$d\Phi_k = -\Psi_{k-1} + \frac{2n-2k-1}{2(k+1)}\Psi_k, \tag{9}$$

on $k = 0, \ldots, n-1$ i $\Psi_{-1} \equiv 0$ per definició. La $(2n-1)$-forma Π en $F(M)$ es defineix ara com

$$\Pi = \frac{1}{\pi^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-2k-1) \cdot 2^{n+k} k!} \Phi_k. \tag{10}$$

Utilitzant (9) i després (8), finalment arribem a

$$d\Pi = \frac{1}{2^{2n}\pi^n n!}\Psi_{n-1} = \Theta,$$

que és exactament (7).

Aquesta demostració de (7) és l'enveja i la desesperació de tothom qui treballa en geometria diferencial. Chern va fer aquest càlcul principalment de cap[3] i, al llarg de tota la seva vida, semblava capaç d'evocar a voluntat aquesta mateixa qualitat màgica en els seus càlculs.

3 Vegeu Wu [18] per a més informació.

Per al pas final en la demostració de Chern de (3), considerem el fibrat esfèric $S(M) = \{(x, f) : f$ és un vector unitari en l'espai tangent de M en $x\}$, i $F(M)$ és un fibrat sobre $S(M)$ i tenim la projecció natural $\pi_1 : F(M) \to S(M)$. Breument, les formes Φ_k i Ψ_k *baixen* a $S(M)$, en el sentit que són la imatge recíproca de les formes en $S(M)$ per π_1^*. Aleshores, el mateix és cert per a Π i Θ, de manera que podem veure (7) com una relació entre formes en $S(M)$. Ara, donat qualsevol punt x_0 en M, el teorema de Hopf sobre camps vectorials diu que hi ha un camp vectorial v definit en $M \setminus \{x_0\}$, de manera que la seva singularitat aïllada en x_0 té índex igual a $\chi(M)$, la característica d'Euler de M. Considerant v com una secció del fibrat $S(M) \to M$ sobre $M \setminus \{x_0\}$, és elemental veure que, en $M \setminus \{x_0\}$, tenim que

$$\Omega = d(v^*\Pi).$$

A més, i aquesta és una observació crítica de Chern, la restricció de Π (com una forma en $S(M)$) a la fibra S_{x_0} de $S(M)$ sobre x_0 és exactament

$$\Pi|_{S_{x_0}} = \frac{(n-1)!}{2\pi^n} d\sigma,$$

on $d\sigma$ és el volum de l'esfera unitat S_{x_0} en l'espai tangent de M en x_0.[4] Amb un argument estàndard, expressant $M \setminus \{x_0\}$ com el límit de M menys la bola petita de radi ϵ al voltant de x_0 com a $\epsilon \to 0$ i utilitzant el teorema de Stokes, la integral de (3) es converteix en la integral

$$\int_{S_{x_0}} v^*\Pi = \int_{v_*(S_{x_0})} \Pi = \chi(M),$$

on hem fet ús del fet clàssic que el volum de l'esfera unitat en un espai $2n$-dimensional és $\frac{2\pi^n}{(n-1)!}$. *Ara veiem exactament per què el teorema de Gauss-Bonnet és cert.*

Podem interpretar la demostració precedent de la manera següent: la forma Ω, essent una forma de màxim grau en M, és automàticament tancada i, aleshores, representa una classe de cohomologia pel teorema de De Rham. El que el teorema de Gauss–Bonnet (3) diu és que aquesta classe és la classe d'Euler. Aquest és el primer exemple d'una representació canònica d'una classe de cohomologia amb la curvatura de la mètrica de Riemann. Un cop ens en hem adonat, el pas següent és perfectament obvi, i. e., com generalitzar aquesta construcció. El fet que aquesta era la idea de Chern es pot deduir no només del seu article del 1946 [6], el qual introdueix les classes de Chern, sinó de manera més explícita del que va dir sobre el teorema de Gauss–Bonnet en la darrera frase del segon paràgraf de la pàgina 85 [6] i també de les pàgines 114–115,

4 El generador de l'anell cohomològic de la fibra (una esfera) és transgressiu, en el sentit que està representat per la restricció d'una forma en $S(M)$, la derivada exterior de la qual és la imatge recíproca d'una forma en la base M. Aquesta és la primera aparició d'una transgressió en topologia algebraica.

loc. cit. Abans de fer més comentaris sobre [6], anem a fer una pausa per a fer algunes observacions històriques.

La idea d'utilitzar la curvatura d'un fibrat principal per a generar classes característiques és ara tan estàndard que és difícil per a nosaltres, seixanta anys després, apreciar plenament la sorprenent originalitat de la contribució de Chern. El fet posat de manifest per (4), en el sentit que, en geometria diferencial, els fibrats associats a una varietat són una part essencial de qualsevol intent de comprendre la varietat mateixa, era impensable en aquell temps. L'ús de la curvatura i del teorema de De Rham per a generar classes cohomològiques va ser igualment revelador. Potser les paraules d'un contemporani, André Weil, poden donar una idea més precisa de la realització de Chern. Weil va ser un dels primers de la seva generació a reconèixer la importància del treball d'Elie Cartan i estava familiaritzat amb la teoria de les formes diferencials exteriors de Cartan, així com amb l'ús per part de Cartan dels fibrats. De fet, originalment Weil volia escriure l'article d'Allendoerfer-Weil [1] utilitzant formes diferencials en lloc de tensors (Weil [16], pàg. 554). Per tant, tenia tots els avantatges que un matemàtic podria demanar per a desxifrar l'enigma de Gauss-Bonnet, però la idea que hi hauria una gran simplificació conceptual de l'integrand de Gauss-Bonnet utilitzant el fibrat esfèric (en la forma de (4)) i que l'integrand seria un representant d'una classe de cohomologia se li va escapar. Com va assenyalar:

> Les espaces fibrés [...] Leur rôle en géométrie différentielle, et tout particulièrement dans l'oeuvre d'Elie Cartan, été longtemps resté implicite, mais s'était clarifié peu à peu grâce aux travaux d'Ehresmannet surtout à ceux de Chern. La démonstration par Chern de la formule de Gauss-Bonnet et sa découverte des classes caractéristiques des variétés à structure complexe ou quasi-complexe avaient inauguré une nouvelle époque en géométrie différentielle, [...] ([17], p. 566)

> [Chern i jo] estàvem començant a adonar-nos del paper principal que tenien els fibrats, encara que majoritàriament entre bambolines, en tots els tipus de problemes geomètrics [...]. Em limitaré a assenyalar el que ara veiem en retrospectiva sobre la demostració de Chern del teorema de Gauss-Bonnet, en comparació amb el que Allendoerfer i jo havíem fet el 1942, seguint els passos d'H. Weyl i altres investigadors. Aquesta última demostració, que queda en la teoria de «tubs», depèn (encara que això no va ser aparent en el seu moment) de la construcció d'un fibrat esfèric, però d'un fibrat no-intrínsec, és a dir, el fibrat transversal per a una determinada immersió en l'espai euclidià; la demostració de Chern va treballar explícitament per primera vegada amb un fibrat intrínsec, el fibrat de vectors tangents de longitud 1, cosa que aclareix el tema d'una vegada per totes. ([17], pàg. x-xi)

Aquestes citacions també poden donar alguna idea sobre per què l'admiració de Weil per Chern no va decaure mai en tota la seva vida.

Ja s'ha esmentat que Chern va començar la seva recerca definint les classes característiques generals quasi tan aviat com va veure la manera de demostrar el teorema de Gauss-Bonnet. En poques paraules, el resultat d'aquest treball és el contingut del seu article [6]. Breument, sigui una matriu hermítica donada en una varietat complexa n-dimensional M, i sigui Ω^i_j $(i, j = 1, \ldots, n)$ la curvatura de la connexió hermítica relativa a una referència unitaria local $\{e_i\}$ (i = 1,...,n) (és a dir, cada e_i és un camp vectorial de tipus $(1,0)$ i $\{e_i(x)\}$ és una base ortonormal de l'espai tangent holomorf en x per a tot x respecte de la mètrica hermítica). Ω^i_j és de tipus $(1,1)$. Considerem ara les formes n-diferencials $c_k(\Omega)$ $(k = 1, \ldots, n)$ de tipus (k, k):

$$c_k(\Omega) = \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^k \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma)\Omega^{i_1}_{\sigma(i_1)} \wedge \cdots \wedge \Omega^{i_k}_{\sigma(i_k)}, \tag{11}$$

on cada σ recorre totes les permutacions de $i_1, \ldots, i_k$ i el corresponent $\epsilon(\sigma)$ és el signe de la permutació, el qual és $+1$ si σ és parell i -1 si σ és senar. Aquestes són les *formes de Chern* de la mètrica hermítica. Es pot argumentar, com en (2), que aquests $c_k(\Omega)$ no depenen de l'elecció de la referència unitària $\{e_i\}$, de manera que estan globalment definits com a formes diferencials en M. Un càlcul fet utilitzant la identitat de Bianchi mostra que, de fet, cada $c_k(\Omega)$ és una forma tancada. Pel teorema de De Rham, cada $c_k(\Omega)$ representa una classe de cohomologia de grau $2k$, la k-èsima *classe de Chern* de la varietat M. La inusual presentació del coeficient en (11) garanteix que les classes de Chern són classes enteres.

Ara sigui $U(M) = \{(x, u_1, \ldots, u_n) : x \in M; u_1, \ldots, u_n$ són una base ortonormal de l'espai tangent holomorf de M en $x\}$. Ens referirem a $U(M)$ com el *fibrat de referències unitàries* sobre M. Tenim la projecció natural $\pi : U(M) \to M$. L'anàleg de (4) és que cada una d'aquestes formes $c_k(\Omega)$, pujada per imatge recíproca a $U(M)$, es converteix en una forma exacta.[5] Com en (10), aquest fet queda demostrat per una construcció explícita,

$$\pi^* c_k(\Omega) = d(Tc_k(\Omega)), \tag{12}$$

on cada $Tc_k(\Omega)$ és una forma explícitament construïda a partir de $c_k(\Omega)$. Per simplicitat, ens referirem a $Tc_k(\Omega)$ com la *transgressió* de $c_k(\Omega)$.[6] A continuació, tindrem ocasió de referir-nos al fet que cada $Tc_k(\Omega)$ es pot escriure explícitament en termes de $c_k(\Omega)$ i la mètrica.

Quan la mètrica hermítica és kähleriana, Chern identificava la n-èsima forma de Chern $c_k(\Omega)$ amb l'integrand de Gauss-Bonnet de la varietat *riemanniana* subjacent de M ([6], pàg. 114–115). Per tant, es veu la relació directa entre els articles [5] i [6]. (Com és ben conegut, la n-èsima classe de Chern és sempre la classe d'Euler; vegeu [13].) A més, la definició de Chern de les formes $c_k(\Omega)$ en (11) es basa en el fet que els polinomis corresponents als $c_k(\Omega)$ generen

5 Evidentment, *a posteriori* reconeixem que aquesta és una conseqüència de la trivialitat topològica de l'espai total del fibrat universal.

6 Aquesta és la terminologia de Chern en els seus darrers anys, i es diferencia de l'estàndard. Tanmateix, el fenomen concret de la transgressió (sense nom) va aparèixer per primera vegada en el teorema 8 de la pàgina 103 de [6].

els polinomis invariants del grup unitari. Així, en el treball seminal de Chern, veiem els ingredients clau de la definició de Weil de 1949 de l'anomenat apropiadament *homomorfisme de Chern-Weil* en un fibrat general amb grup de Lie arbitrari com a grup estructural ([16], pàg. 422–436).

Per arrodonir l'explicació, cal assenyalar que l'anàleg de les formes de Chern per al grup ortogonal va ser introduït al voltant del mateix temps per Pontryagin [14], encara que els detalls van arribar més tard [15].

En la dècada de 1940, la principal preocupació en topologia era la categoria real, i el treball de Chern sobre les classes característiques de varietats complexes es va veure al començament lleugerament fora de lloc. Però l'espectacular creixement de la geometria algebraica, particularment la geometria algebraica transcendental, a partir de la dècada de 1950 va fer de Chern un profeta. Les classes de Chern són importants en la geometria algebraica almenys per dues raons. Una és que es va suggerir que les classes de Chern de varietats algebraiques podien proporcionar una base ferma per a l'aleshores confusa profusió d'invariants algebraics i geomètrics. Hodge va ser un dels primers a impulsar aquest punt de vista [12]. El mateix Chern va fer contribucions importants en aquesta direcció, però el treball de F. Hirzebruch en la dècada de 1950, va completar aquest desenvolupament i va fer, d'aquesta visió, una realitat [11]. Una segona raó potser més important és que ara molts arguments estàndards en geometria algebraica (per exemple, els que utilitzen el teorema d'anul·lació de Kodaira o aplicacions de la solució de Yau de la conjectura de Calabi) simplement no són possibles sense les representacions de la curvatura de les classes de Chern d'un fibrat.

La fama de Chern va començar a estendre's després de 1944, encara que lentament, en la comunitat matemàtica americana i va ser convidat a donar una conferència d'una hora en la reunió d'estiu del 1945 de l'American Mathematical Society. En comentar el text de la conferència [7], Heinz Hopf va escriure al *Mathematical Reviews* que el treball de Chern havia iniciat una nova època en la geometria diferencial global. Posteriorment, l'estudi global de varietats es va convertir en la direcció principal de la recerca geomètrica. A l'edat de trenta-quatre anys, Chern havia realitzat el seu somni de joventut d'escalar un dels cims més alts del que en deia *la muntanya preciosa*.

A l'abril de 1946, Chern va tornar a la Xina i li va ser immediatament confiada la creació d'un institut de matemàtiques per a l'Acadèmia Sinica a Nanking. Així ho va fer, i es va convertir *de facto* en el seu director (el títol oficial era *Director adjunt*). Normalment, s'entén per «institut de matemàtiques» una trobada d'investigadors per explorar les fronteres de la recerca, però la Xina encara no estava preparada per a aquest tipus d'institut per la manca d'un nombre suficient d'investigadors matemàtics xinesos. Essent un realista de dalt a baix, Chern va convertir l'institut en l'única cosa que podia ser, és a dir, la primera facultat realment de matemàtiques de la Xina. Va aplegar un grup de gent jove i es va fer càrrec personalment de la seva educació ensenyant-los els fonaments de la matemàtica moderna. Posteriorment, molts d'aquest grup es van convertir en líders de la generació següent de matemàtics xinesos.

A finals de 1948, la situació política a la Xina s'havia tornat tan inestable que Veblen i Weyl van començar a preocupar-se per la seguretat de Chern. Amb l'ajuda de R. Oppenheimer, aleshores director de l'IAS, Chern i la seva família van aconseguir aterrar als EUA el dia de Cap d'Any de 1949. Ell va ser membre de l'IAS el següent semestre de primavera i, a la tardor, va ocupar una posició docent a la Universitat de Chicago, on va romandre fins al 1960. El 1950, Chern va donar una conferència d'una hora a l'International Congress of Mathematicians (celebrat a Cambridge, Massachusetts) sobre geometria diferencial dels fibrats. Va ser en la dècada dels cinquanta que les classes de Chern van començar a entrar en la consciència de la majoria dels matemàtics, a causa, en gran part, dels espectaculars avenços de la geometria algebraica realitzats per Kodaira, Hirzebruch i d'altres.

El 1960, Chern va acceptar l'oferta d'anar a la Universitat de Califòrnia a Berkeley. En arribar, va atreure immediatament un grup de joves geòmetres. En la dècada del 1960 i 1970, Berkeley es va convertir *de facto* en el centre de la geometria a escala mundial. Encara que oficialment Chern es va jubilar el 1979, es va mantenir actiu en els afers del departament de Berkeley fins a mitjan dècada del 1980, i va fer de Berkeley casa seva fins al 1999. Va rebre molts honors en els anys de Berkeley, els principals van ser l'elecció a la National Academy of Sciences el 1961, la U.S. National Medal of Science el 1975 i el premi Wolf del govern d'Israel el 1984. Més tard, també va rebre el premi Lobachevsky de l'Acadèmia Russa, el 2002, i el primer premi Shaw en matemàtiques el 2004, pocs mesos abans de la seva mort. El 2002, va ser president honorari de l'International Congress of Mathematicians celebrat a Beijing.

La posició de lideratge de Chern en la geometria diferencial es va veure incrementada sobretot pel seu treball durant els anys de Berkeley. Dos dels seus articles principals tornaven als seus primers treballs sobre les classes característiques. Comentant això, Chern assenyalava que la seva principal contribució a les classes característiques no era tant la introducció de les classes de Chern com el descobriment de les *formes* diferencials explícites que representen aquestes *classes*. Per a ell, eren les formes allò que donava avantatge als geòmetres respecte als topòlegs en l'estudi de molts aspectes d'aquestes classes. Pensant en exemples com la solució de Yau de la conjectura de Calabi, difícilment es pot discrepar d'ell. Els dos treballs que es discutiran més endavant justifiquen el seu punt de vista.

El 1965, en la col·laboració amb Raoul Bott [2] sobre la teoria de Nevanlinna generalitzada per a dimensions més grans, van construir per a la categoria holomorfa la versió «correcta» de la transgressió (cf. (12)) en la dimensió màxima i van demostrar que, en el cas d'un fibrat vectorial holomorf n-dimensional $\pi : E \to M$ sobre una varietat complexa n-dimensional, la imatge recíproca de la forma de Chern màxima $\pi * c_n(\Omega)$ a $E \setminus 0$ (aquí 0 denota la secció zero) és no només exacte (vegeu (12)), sinó «doblement exacte»:

$$\pi * c_n(\Omega) = dd^c \rho$$

per a alguna $(n-1, n-1)$-forma ρ en $E \setminus 0$. La no-trivialitat d'aquesta afirmació prové del fet que $E\setminus 0$ no és ni compacte ni se suposa que sigui kählerià. Aquesta propietat de la classe màxima de Chern és fonamental per a la generalització del primer teorema principal de Nevanlinna. Ells dos també van fer ús d'aquest fenomen de la «doble exactitud» quan van introduir les *classes de Chern refinades*, les quals han fet el seu camí en la teoria algebraica de nombres. Per cert, aquest article de Chern-Bott és també una extensió natural de la tasca pionera de Chern dels anys cinquanta per a geometritzar la teoria de Nevanlinna trasplantant-la a varietats complexes [8]. El punt de vista geomètric de la teoria de Nevanlinna ha demostrat ser extraordinàriament fructífer en geometria algebraica i té repercussions, també, en teoria de nombres.

El segon article relacionat amb els primers treballs de Chern sobre classes característiques data de 1971, quan ell i Jim Simons van introduir els invariants de Chern-Simons [10]. Sigui M una varietat riemanniana n-dimensional. Considerant l'homomorfisme de Chern-Weil, sigui $P(u^i_j)$ un polinomi invariant en l'àlgebra de Lie $\mathtt{so}(n)$ del grup ortogonal $O(n)$. Si Θ^i_j és la curvatura en el fibrat de referències $F(M)$ com en l'equació (5), aleshores $P(\Theta^i_j)$ és una forma tancada en $F(M)$ que és la imatge recíproca d'una forma en M (compareu amb l'equació (6)) i, per tant, representa una classe de cohomologia de M. D'altra banda, com en les equacions (4) i (12), $P(\Theta^i_j)$ és en realitat una forma exacta en $F(M)$, que escrivim com

$$P(\Theta^i_j) = dTP(\Theta^i_j). \tag{13}$$

Com s'ha dit anteriorment, la forma $TP(\Theta^i_j)$ s'obté a partir de $P(\Theta^i_j)$ amb una construcció explícita. *Si la forma $P(\Theta^i_j)$ és igual a 0*, aleshores $TP(\Theta^i_j)$ es converteix en una forma tancada en $F(M)$ i, per tant, defineix una classe de cohomologia de $F(M)$ (més que M mateix).

Fins ara, les formes $P(\Theta^i_j)$ i $TP(\Theta^i_j)$ depenen de l'elecció de la mètrica riemanniana en M. Ara suposem que canviem la mètrica en M per un factor conforme. Aleshores, hi ha un isomorfisme natural de fibrats entre els fibrats de referència. En particular, els grups cohomològics dels seus espais totals són naturalment isomorfs i d'ara en endavant els identificarem. Chern i Simons van demostrar que, amb aquest canvi conforme de mètrica, *la forma $P(\Theta^i_j)$ no canvia* i la *classe cohomològica* de $TP(\Theta^i_j)$, com a classe en $F(M)$, *tampoc no canvia*. Aquesta classe cohomològica $[TP(\Theta^i_j)]$ és aleshores un invariant conformacional de la mètrica riemanniana. Ells també van donar aplicacions d'aquest fet a les immersions conformes en l'espai euclidià.

En el cas que M sigui una varietat riemanniana 3-dimensional i P_1 sigui el primer polinomi de Pontryagin, aleshores $P_1(\Theta^i_j)$, essent la imatge recíproca d'una 4-forma en una varietat 3-dimensional, ha de ser 0. Les consideracions anteriors s'apliquen aquí i, per tant, tenim una classe de cohomologia $[TP(\Theta^i_j)]$ en $F(M)$, la qual és un invariant conforme de M. Tanmateix, en aquest cas, la *forma $TP(\Theta^i_j)$* es pot escriure simplement com: amb Θ^i_j la forma de connexió de $F(M)$ (vegeu la notació de l'equació (5)),

$$TP(\Theta^i_j) = \frac{1}{4\pi^2}\{\theta^1_2 \wedge \theta^1_3 \wedge \theta^2_3 + \theta^1_2 \wedge \Theta^1_2 + \theta^1_3 \wedge \Theta^1_3 + \theta^2_3 \wedge \Theta^2_3\}. \qquad (14)$$

Per a sorpresa de Chern i Simons, els físics que treballaven en superconductivitat i en teoria de les surpercordes van definir quasi immediatament la 3-forma $TP(\Theta^i_j)$ com l'*acció de Chern-Simons*. Presa per si sola, és una 3-forma tancada que pot definir-se per a qualsevol connexió en M sense cap referència a una mètrica, i ha continuat exercint un paper important en física teòrica. Aquesta és una confirmació estricta de la creença de Chern en la importància de les formes.

L'invariant de Chern-Simons no pot ser definit a menys que tinguem una *forma* de Pontryagin igual a 0. Naturalment, això planteja la qüestió de si, en una determinada varietat amb una classe de Pontryagin nul·la, hi ha una mètrica riemanniana la forma de Pontryagin de la qual sigui zero.

Un dels treballs més importants que va fer Chern en els seus anys de Berkeley no hauria de quedar sense esmentar. El 1974, ell i Jürgen Moser van escriure un article sobre una qüestió completament diferent [9]. Generalitzant el treball d'Elie Cartan sobre hipersuperfícies reals d'espais euclidians complexos de dimensió dos, van definir el que ara anomenem l'*invariant de Chern-Moser* d'aquestes superfícies en totes les dimensions. Aquests invariants són un conjunt complet d'invariants locals en el cas real analític. L'estudi d'aquests invariants és ara una part fonamental de l'anàlisi complexa geomètrica. Finalment, el 1992, quan Chern ja tenia quasi vuitanta anys, va trobar inspiració en el seu treball del final de la dècada de 1940 i, amb D. Bao i Z. Shen, va defensar fermament la generalització de la geometria clàssica de Riemann al punt de vista de Finsler. Aquesta defensa va atreure molts deixebles.

Durant els seus anys a Berkeley, el seu lideratge es va fer sentir també en altres àrees, però en cap més que en la fundació de dos instituts de matemàtiques. El 1981, la proposta que va realitzar conjuntament amb Calvin Moore i I. M. Singer per establir un institut de matemàtiques al campus de Berkeley va ser aprovada oficialment pel govern, i va néixer el Mathematical Sciences Research Institute (MSRI). Chern va ser-ne el seu primer director fins al 1984. El model operatiu del MSRI es diferencia significativament de l'institut de recerca més important del nostre temps, el Princeton Institute for Advanced Study. En contrast amb aquest darrer, el MSRI no té professorat permanent i cada any les seves activitats s'organitzen al voltant de temes matemàtics clarament definits. Els matemàtics sèniors de cada àrea són convidats a visitar el MSRI per un any (o una part de l'any) per ajudar a organitzar les activitats científiques. Des d'aleshores, aquest model s'ha seguit a tot el món per altres instituts.

A partir de la dècada de 1970, Chern va prendre la iniciativa en el restabliment de la comunicació matemàtica entre els EUA i la Xina. Després de la seva jubilació oficial a Berkeley el 1979, les seves visites a la Xina es van fer més freqüents. Atès que la Xina ha venerat l'erudició durant tres mil anys, va ser fàcil per a algú com Chern, amb capacitat diplomàtica i preeminència, acostumar-se a treballar subtilment al més alt nivell polític a la Xina. Això podria explicar, en part, com va ser capaç d'establir, el 1984, un institut de recerca matemàtica a la seva *alma mater*, la Universitat de Nankai, a Tianjin. Els principals objectius de l'Institut de Nankai han estat atreure els principals matemàtics de tot el món per visitar Tianjin i convertir-se en un centre actiu de matemàtiques. Chern va perseguir aquest objectiu amb energia i el govern xinès va col·laborar a donar la benvinguda als visitants estrangers. Quan finalment, el 1999, Chern va tornar a la Xina per sempre, la prosperitat de l'institut es va convertir en el seu projecte final. Va fer plans ambiciosos que en el moment de la seva mort s'havien realitzat només parcialment.

Chern deixa el seu fill Paul L. Chern, la seva filla May P. Chu, i quatre néts, Melissa, Theresa, Claire i Albert. Shihning, la seva dona durant seixanta anys, va morir a principis del 2000 a Tianjin.

Nota sobre l'autor Hung-hsi Wu és professor de matemàtiques a la Universitat de Califòrnia a Berkeley i va conèixer Chern el 1962.

Referències

[1] Allendoerfer, C. B.; Weil, A. «The Gauss-Bonnet theorem for Riemannian polyhedra». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 53 (1943), 101–129.

[2] Bott, R.; Chern, S.-s. «Hermitian vector bundles and the equidistribution of their zeroes of their holomorphic sections». *Acta Math.*, 114 (1965), 71–112.

[3] Chern, S.-s. «On integral geometry in Klein Spaces». *Ann. of Math.*, 43 (1942), 178—189.

[4] Chern, S.-s. «The geometry of isotropic surfaces». *Ann. of Math.*, 43 (1942), 545–549.

[5] Chern, S.-s. «A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds». *Ann. of Math.*, 45 (1944), 747–752.

[6] Chern, S.-s. «Characteristic classes of Hermitian manifolds». *Ann. of Math.*, 47 (1946), 85—121.

[7] Chern, S.-s. «Some new viewpoints in the differential geometry in the large». *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52 (1946), 1–30.

[8] Chern, S.-s. «The intergrated form of the first main theorem for complex analaytic mappings in several complex variables». *Ann. of Math.*, 71 (1960), 536–551.

[9] Chern, S.-s.; Moser, J. «Real hypersurfaces in complex manifolds». *Acta Math.*, 133 (1974), 219–271.

[10] Chern, S.-s.; Simons, J. «Characteristic forms and geometric invariants». *Ann. of Math.*, 99 (1974), 48–69.

[11] Hirzebruch, F. *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie.* Berlín: Springer, 1956. (Ergebnisse der Mathematik; 9)

[12] HODGE, W. V. D. «The characteristic classes of algebraic varieties». *Proc. London Math. Soc.*, 1 (1951), 138–151.

[13] MILNOR, J. W.; STASHEFF, J. D. *Characteristic Classes*. Princeton: Princeton University Press, 1974.

[14] PONTRYAGIN, L. S. «On some topological invariants of closed Riemannian manifolds». *C. R. (Doklady) Acad. Sci. USSR*, 43 (1944), 91–94.

[15] PONTRYAGIN, L. S. «Some topological invariants of closed Riemannian manifolds». *Izvestiya Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 13 (1949), 125–162.

[16] WEIL, A. «S. S. Chern as geometer and friend». A: *Shiing-shen Chern: Selected papers*. Nova York; Berlín; Heidelberg: Springer, 1978, IX-XII.

[17] WEIL, A. *Oeuvres scientifiques: Collected papers*. Volum 1 (1926–1951). Nova York; Berlín; Heidelberg: Springer, 1979.

[18] WU, H. «S. S. Chern, the Berkeley years». A: YAU, S. T.; LIU, K.; JI, L. [eds.]. *Shiing-shen Chern memorial volume*. Xina: Zhejiang University Press, 2005. [En xinès; traducció anglesa en preparació]

[19] WU, H. «Historical development of the Gauss-Bonnet theorem». *Science in China*, sèrie A: *Mathematics*, 51 (2008), 777–784.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
UNIVERSITY OF CALIFORNIA AT BERKELEY
BERKELEY, CALIFORNIA 94720-3840
wu@math.berkeley.edu